Стохастические системы

© 2024 г. В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru)
(Сочинский институт Российского университета дружбы народов),
Ю.Г. МАРТЫШЕНКО, канд. физ.-мат. наук (j-mart@mail.ru)
(РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва)

К ЗАДАЧЕ ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается система нелинейных стохастических функционально-разностных уравнений с ограниченным запаздыванием. Предполагается, что рассматриваемая система допускает “частичное” (по части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Ставится задача анализа частичной устойчивости по вероятности данного положения равновесия: устойчивость рассматривается по части определяющих его переменных. Для решения применяется дискретно-стохастический вариант метода функционалов Ляпунова–Красовского в соответствующей модификации. Получены условия частичной устойчивости по вероятности указанного вида. Приводится пример, показывающий особенности предложенного подхода, а также целесообразность введения однопараметрического семейства функционалов.

Ключевые слова: система нелинейных стохастических функцио-нально-разностных уравнений с ограниченным запаздыванием, частичная устойчивость по вероятности, метод функционалов Ляпунова–Красовского.

DOI: 10.31857/S0005231024080021, **EDN:** WPQVKN

1. Введение

Отдельное направление исследований в задачах качественного анализа и синтеза нелинейных динамических систем связано с анализом устойчивости систем стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений [1–9]. Интерес к этим системам вызван внедрением цифровых систем управления, проблемами моделирования в различных областях, а также задачами численного решения систем стохастических дифференциальных уравнений.

В рамках данного направления используется трактовка систем дискретных уравнений порядка выше первого (порядка $m \geqslant 1$)

$$x(k+1) = X(k, x(k), x(k-1), \dots, x(k-m))$$

как систем *дискретных уравнений с запаздыванием* (см., например, монографии [9–11]). Такая трактовка дает новые возможности качественного анализа этих систем, хотя их можно преобразовать к стандартным одношаговым системам дискретных уравнений введением новых переменных и расширением пространства состояний.

С другой стороны, в прикладных задачах управления через сеть (networked control) возникают системы дискретных уравнений с *переменным* запаздыванием

$$x(k+1) = X(k, x(k), x(k-\tau_1(k)), \ldots, x(k-\tau_l(k))),$$

в которых функции $\tau_i(k)$ в каждый дискретный момент времени k принимают одно из целочисленных значений из промежутка $0 < \tau_i(k) \leqslant m$. При фиксации величины запаздывания эти системы можно рассматривать как одношаговые дискретные системы с переключениями структуры (switched systems) в расширенном пространстве состояний [12].

Общий класс систем нелинейных дискретных уравнений с ограниченным запаздыванием задается системой *функционально-разностных* уравнений [9, 11, 13–19]

$$x(k+1) = X(k, x_k),$$

состояние которых в каждый дискретный момент времени $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ определяется дискретной вектор-функцией $x_k = x(k+j)$, $j \in \mathbb{Z}_0 = \{-m, -m+1, \ldots, 0\}$ с запаздывающим (отстающим) аргументом; число $m \geqslant 1$ определяет величину запаздывания. Данный класс систем с начала 90-х годов прошлого столетия исследуется отдельно и включает системы дискретных уравнений с постоянным, переменным, а также с интервально заданным одним или несколькими запаздываниями.

Переход к функционально-разностной трактовке позволяет использовать для анализа устойчивости систем нелинейных стохастических дискретных уравнений с запаздыванием стохастический вариант метода функционалов Ляпунова–Красовского [9, 20–25] в пространстве дискретных (сеточных) функций. Для детерминированных нелинейных систем дискретных уравнений с запаздыванием этот подход изложен в [13–19]. Полученные результаты относятся к задаче устойчивости *по всем переменным* нулевого положения равновесия. Активно рассматриваемые в последнее время более общие задачи *частичной* устойчивости, анализ которых имеет существенные отличия (см. обзор [26]), для систем нелинейных стохастических дискретных уравнений с запаздыванием не изучались.

В данной статье рассматривается общий класс систем нелинейных стохастических дискретных уравнений с ограниченным запаздыванием. Предполагается, что рассматриваемая система допускает "частичное" (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Дается постановка задачи устойчивости по вероятности данного положения равновесия по части определяющих его переменных. Для решения применяется метод функционалов, являющимися дискретными аналогами функционалов Ляпунова–Красовского, которые широко используются при анализе систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием).

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейное конечномерное пространство $\mathbb{R}^n$ векторов x с евклидовой нормой $|x|$ и введем разбиение вектора x на две части: $x = (y^{\mathrm{T}}, z^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ (Т – знак транспонирования). К настоящему времени достаточно изученным является класс систем нелинейных стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений первого порядка [1, 2]

$$x(k+1) = X(k, x(k), \xi(k)),$$

в котором: $k \in \mathbb{Z}_+$ – дискретное время; $x(k)$ – последовательность значений фазового вектора; $\xi(k)$ – последовательность независимых случайных векторов, заданных на вероятностном пространстве (Ω, F, P), с одинаковыми законами распределения для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$. Здесь Ω – пространство элементарных событий $\{\omega\}$ с заданными на нем σ-алгеброй F измеримыми множествами с фильтрацией F_k и вероятностной мерой $P : F \to [0, 1]$.

В приложениях также часто возникают более общие системы стохастических нелинейных дискретных уравнений с ограниченным запаздыванием [9, 20–24, 27, 28]

$$x(k+1) = X(k, x_k, \xi(k)), \tag{1}$$

состояние которых в каждый дискретный момент времени $k \in \mathbb{Z}_+$ определяется дискретной вектор-функцией $x_k = x(k+j)$, $j \in \mathbb{Z}$ с запаздывающим (отстающим) аргументом.

Допустим, что оператор $X(k, \psi, \xi)$, определяющий правую часть системы (1) в пространстве $\{\psi\}$ дискретных (сеточных) функций $\psi(\theta)$, $\theta \in \mathbb{Z}_0$ с нормой $\|\psi\| = \max\{|\psi(0)|, |\psi(-1)|, \ldots, |\psi(-m)|\}$, при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ *непрерывен* по ψ, ξ в области $||\psi|| < \infty$. Начальное состояние x_0 системы (1), которое определяется набором значений $x_0 = \{x(k_0), x(k_0-1), \ldots, x(k_0-m)\}$, образующих матрицу размера $n \times (m+1)$, будем считать детерминированным. Тогда для всех $k_0 \geqslant 0, x_0$ существует единственный случайный многомерный дискретный процесс $x(k_0, x_0)$, согласованный с потоком σ-алгебр F_k и являющийся решением системы (1), а также соответствующий этому решению набор выборочных траекторий системы (1). Обозначим через $x(k) = x(k; k_0, x_0)$ значения случайной вектор-функции $x(k_0, x_0)$ на k-м шаге процесса.

С учетом разбиения $x = (y^{\mathrm{T}}, z^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и соответствующего разбиения $x_k = (y_k^{\mathrm{T}}, z_k^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим рассматриваемую систему в виде двух групп уравнений

$$y(k+1) = Y(k, y_k, z_k, \xi(k)), \quad z(k+1) = Z(k, y_k, z_k, \xi(k)).$$

Если имеет место условие $Y(k, 0, z_k, \xi(k)) \equiv 0$, то множество $M = \{x_k : y_k = 0\}$ является "частичным" положением равновесия системы (1) – инвариантным множеством этой системы. Существования «полного» положения равновесия $x_k = 0$ системы (1) не требуется: это предположение может даже противоречить смыслу решаемых задач.

Устойчивость "частичного" положения равновесия $y_k = 0$ рассматривается не по всем определяющим его переменным, а только по отношению к их некоторой наперед заданной части. Для этого предположим, что $y = (y_1^{\mathrm{T}}, y_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, причем вектор y_1 включает те компоненты вектора y, устойчивость по которым рассматривается. Для расширения круга понятий y_1-устойчивости "частичного" положения равновесия $y_k = 0$ введем произвольным образом разбиение $z = (z_1^{\mathrm{T}}, z_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ вектора z на две группы переменных.

Обозначим через D_δ область значений x_0 таких, что $||y_0|| < \delta$, $||z_{10}|| < L$, $||z_{20}|| < \infty$. Используются нормы:

$$||y_0|| = \max|y(k_0 + j)|, \quad ||z_{i0}|| = \max|z_i(k_0 + j)| \quad (i = 1, 2) \text{ при } j \in \mathbb{Z}_0.$$

Определение 1. "Частичное" положение равновесия $y_k = 0$ системы (1) *при больших значениях z_{10} в целом по z_{20}* (*for a large values of z_{10} and on the whole with respect to z_{20}*):

1) *y_1-устойчиво по вероятности, если для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$ такое, что для всех $k \geqslant k_0$ и $x_0 \in D_\delta$ имеет место соотношение*

$$P\left\{\sup_{k \geqslant k_0} |y_1(k; k_0, x_0)| > \varepsilon\right\} < \gamma; \tag{2}$$

2) *равномерно y_1-устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$.*

Ставится задача нахождения условий y_1-устойчивости при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} по вероятности "частичного" положения равновесия $y(k) = 0$ системы (1) в контексте метода дискретных функционалов Ляпунова–Красовского.

Данную задачу можно рассматривать и как вспомогательную при анализе устойчивости по всем переменным "частичного" положения равновесия $y_k = 0$ системы (1), а при добавлении к системе (1) управляющих воздействий вида $u = u(k, x_k)$ возникает соответствующая задача частичной стабилизации.

Замечание 1. Если x_0 – случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^{n\times(m+1)}$ (независящая от $\xi(k)$), а включение $x_0 \in D_\delta$ выполняется почти наверное, то получаем определения (см. [29]), аналогичные введенным определениям частичной устойчивости.

Замечание 2. Наиболее близкими к введенным являются понятия частичной устойчивости: по всем [30] и по части переменных [31] "частичного" положения равновесия систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, систем стохастических дискретных уравнений [8], а также устойчивости по части переменных систем функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) [32, 33].

3. Условия частичной устойчивости по вероятности

В пространстве $\{\psi\}$ дискретных (сеточных) функций $\psi(\theta)$, $\theta \in \mathbb{Z}_0$ будем рассматривать однозначные непрерывные по ψ при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ скалярные функционалы $V = V(k, \psi)$, $V(k, 0) \equiv 0$, определенные в области

$$k \geqslant 0, \quad ||\psi_{y1}|| < h, \quad ||\psi_{y2}|| + ||\psi_z|| < \infty. \tag{3}$$

Разбиение $\psi = (\psi_{y1}^{\mathrm{T}}, \psi_{y2}^{\mathrm{T}}, \psi_z^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ соответствует сделанному разбиению $x = (y_1^{\mathrm{T}}, y_2^{\mathrm{T}}, z^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ фазового вектора x; $||\psi_{yi}|| = \max|\psi_{yi}(\theta)|$ $(i = 1, 2)$, $||\psi_z|| = \max|\psi_z(\theta)|$ при $\theta \in \mathbb{Z}_0$.

Подставим в функционал $V(t, \psi)$ вектор-функцию $x_k = x_k(k_0, x_0)$, определяющую дискретный элемент траектории системы (1) на k-м шаге процесса. Аналогом производной функционала в силу исследуемой системы (1) являются их усредненные разности (приращения) [1, 2, 9]

$$LV(k, \psi) = E_{k,\psi}[V(k + 1, x_{k+1}(k_0, x_0))] - V(k, \psi),$$

где оператор $E_{k,\psi}$ определяет условное математическое ожидание при $x_k(k_0, x_0) = \psi$ случайной величины $V(k + 1, x_{k+1}(k_0, x_0))$.

Также для формулировки условий частичной устойчивости дополнительно будут использоваться следующие вспомогательные функционалы и функции.

1. Скалярные непрерывные в области (3) функционалы $V^*(k, \psi_y, \psi_{z1})$, $V^*(\psi_y, \psi_{z1})$ для указания оценки *сверху* V-функционала и вспомогательная вектор-функция $\mu(k, \psi), \mu(k, 0) \equiv 0$, посредством которой корректируется область, где строится V-функционал. Вектор-функция ψ_{z1} определяется разбиением $\psi_z = (\psi_{z1}^{\mathrm{T}}, \psi_{z2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, соответствующим разбиению $z = (z_1^{\mathrm{T}}, z_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Определим $||\mu(k, \psi)|| = \sup|\mu(k, \psi(\theta))|$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, $\theta \in \mathbb{Z}_0$.

2. Непрерывная монотонно возрастающая по $r > 0$ скалярная функция $a(r)$, $a(0) = 0$, определяющая стандартные требования к основному V-функционалу в виде оценки *снизу*.

Введение вспомогательной $\mu(k, \psi)$-функции связано с тем, что анализ y_1-устойчивости «частичного» положения равновесия $y_k = 0$ системы (1) в обычно рассматриваемой области

$$||\psi_{y1}|| < h_1 < h, \quad ||\psi_{y2}|| + ||\psi_z|| < \infty \tag{4}$$

функционального пространства не всегда дает возможность выявить желаемые свойства V-функционала или наделить его этими свойствами. Целесообразно перейти к рассмотрению V-функционала в более узкой области

$$||\psi_{y1}|| + ||\mu(k, \psi)|| < h_1 < h, \quad ||\psi_{y2}|| + ||\psi_z|| < \infty, \tag{5}$$

если иметь в виду, что фактически y_1-устойчивость “частичного” положения равновесия $y_k = 0$ системы (1) означает выполнение соответствующих вероятностных оценок вида (2) не только для компонент вектора y_1, но и для компонент некоторой $\mu(k,x)$-функции фазовых переменных системы (1). Указанную $\mu(k,x)$-функцию не всегда возможно указать заранее. Поэтому соответствующую ей $\mu(k,\psi)$-функцию в рассматриваемом функциональном пространстве дискретных функций естественно трактовать как дополнительную векторную функцию, которая (как и сам подходящий V-функционал) определяется в процессе решения исходной задачи y_1-устойчивости. Это приводит к целесообразности корректировки области (4) функционального пространства, где строится V-функционал, посредством *дополнительной* вспомогательной $\mu(k,\psi)$-функции.

Теорема 1. Пусть для системы (1) *наряду с V-функционалом можно указать дополнительную векторную функцию $\mu(k,\psi), \mu(k,0)\equiv 0$ так, что при каждом $k\in\mathbb{Z}_+$ и достаточно малом $h_1>0$ в области* (5) *выполняются условия:*

$$V(k,\psi)\geqslant a(|\psi_{y1}(0)|+|\mu(k,\psi(0))|), \tag{6}$$

$$V(k,\psi)\leqslant V^*(k,\psi_y,\psi_{z1}),\quad V^*(k,0,\psi_{z1})\equiv 0, \tag{7}$$

$$LV(k,\psi)\leqslant 0. \tag{8}$$

Тогда "частичное" положение равновесия $y_k=0$ системы (1) *y_1-устойчиво по вероятности при больших значениях z_{10} в целом по z_{20}.*

Теорема 2. Если условия (7) *заменить условиями*

$$V(k,\psi)\leqslant V^*(\psi_y,\psi_{z1}),\quad V^*(0,\psi_{z1})\equiv 0, \tag{9}$$

то при выполнении условий (6), (8) *"частичное" положение равновесия $y_k=$ $=0$ системы* (1) *равномерно y_1-устойчиво по вероятности при больших значениях z_{10} в целом по z_{20}.*

Доказательство теорем 1, 2 приведено в Приложении.

Замечание 3. Вспомогательный V-функционал и его усредненная разность (приращение) $LV(k,\psi)$ в силу системы (1) в теоремах 1, 2 являются, вообще говоря, *знакопеременными* в области (4). Наряду с основным V-функционалом дополнительная вспомогательная μ-функция вводится для наиболее рациональной замены области (4) областью (5). Условия (7), (9) выделяют *допустимую структуру* V-функционала, которая определяется спецификой поставленной задачи частичной устойчивости: в этих условиях допускается *произвольный* непрерывный V^*-функционал, для которого $V^*(k,0,\psi_{z1})\equiv 0$ или $V^*(0,\psi_{z1})\equiv 0$, и ограничивающий V-функционал сверху.

Замечание 4. В качестве допустимых можно использовать знакоопределенные по всем переменным *квадратичные* функционалы (или функционалы более высокого порядка) вида $V(k,\psi)\equiv V^*(k,\psi_{y1},\mu(k,\psi))$. При этом выбор μ-функций должен быть согласован с условиями (7), (9): допустимы, например, μ-функции вида $\mu=\mu(\psi_{y2},\psi_{z1}), \mu(0,\psi_{z1})\equiv 0$.

З а м е ч а н и е 5. Если система (1) допускает "полное" положение равновесия $x_k = 0$, то в случае $\mu(k,\psi) \equiv 0$, $\xi(k) \equiv 0$ при начальном условии $||x_0|| < \delta$ (вместо $x_0 \in D_\delta$) при выполнении условий (6), (8) имеем дискретный вариант (см. [34, 35]) классической теоремы В.В. Румянцева [36] об устойчивости по части переменных и ее модификации (при $\mu(k,\psi) \neq 0$) [37]. Выполнение условий (7), (9) при этом не требуется.

З а м е ч а н и е 6. Имеется также другой подход к трактовке и анализу устойчивости стохастических функционально-разностных систем, разработанный в научной школе Н.В. Азбелева [38].

4. Примеры

Выделим два класса нелинейных дискретных систем заданной структуры, для которых частичная устойчивость анализируется в пространстве параметров. При этом покажем также целесообразность использования однопараметрического семейства функционалов.

П р и м е р 1. Пусть дискретная система (1) состоит из уравнений

$$\begin{gathered} y_1(k+1) = [a_1 + \alpha_1\xi_1(k)]y_1(k) + a_2 y_1(k-1) + \\ + l y_2(k-1) z_1(k-1) + \alpha_2 y_1(k-1)\xi_2(k), \\ y_2(k+1) = [b + d y_1(k-1)] y_2(k), \\ z_1(k+1) = [c + e y_1(k-1)] z_1(k), \quad z_2(k+1) = Z_2(k, x_k, \xi(k)), \end{gathered} \tag{10}$$

где $\xi_1(k), \xi_2(k)$ – некоррелированные между собой последовательности независимых случайных величин с одинаковыми стандартными нормальными распределениями вероятностей при каждом $k \in \mathbb{Z}_+; a_1, a_2, b, c, d, e, l, \alpha_1, \alpha_2$ – постоянные параметры. Система (10) является частным случаем системы (1) при $m = 1$; оператор Z_2 удовлетворяет только общим требованиям к системе (1) при $m = 1$.

Система (10) допускает "частичное" положение равновесия

$$y_{1k} = y_{2k} = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим семейство функционалов $(M, \beta_1, \beta_2 = \text{const} > 0)$

$$\begin{gathered} V(\psi) = \psi_{y1}^2(0) + M\psi_{y2}^2(0)\psi_{z1}^2(0) + \\ + (\beta_1 + \alpha_2^2)\psi_{y1}^2(-1) + \beta_2\psi_{y2}^2(-1)\psi_{z1}^2(-1), \end{gathered} \tag{12}$$

являющихся дискретными аналогами функционалов Ляпунова–Красовского, а также вспомогательную скалярную дискретную μ_1-функцию вида

$$\mu_1(\psi(\theta)) = \psi_{y2}(\theta)\psi_{z1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{Z}_0 = \{k = -1, 0\}; \tag{13}$$

обозначим через $\mu_1(0)$ и $\mu_1(-1)$ значения функции $\mu_1(\psi(\theta))$ при $\theta = 0, -1$.

Имеют место соотношения

$$\psi_{y1}^2(0) + M\mu_1^2(0) \leqslant V(\psi) = V^*(\psi_{y1}, \psi_{y2}, \psi_{z1}), \quad V^*(0, 0, \psi_{z1}) \equiv 0.$$

Для V-функционала (12) в области (5) выполняются условия (6) и (7), а его усредненная разность (приращение) $LV(\psi)$ в силу системы (10) при всех $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_0$ определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}
LV(\psi) = E_{k,\psi}\big\{V(\psi(0), X(k, \psi(-1), \psi(0), \xi(k)))\big\} - V(\psi(-1), \psi(0)) = \\
= E_{k,\psi}\big\{[a_1\psi_{y1}(0) + a_2\psi_{y1}(-1) + l\psi_{y2}(-1)\psi_{z1}(-1) + \alpha_1\psi_{y1}(0)\xi_1(k) + \\
+ \alpha_2\psi_{y1}(-1)\xi_2(k)]^2 + M\psi_{y2}^2(0)\psi_{z1}^2(0)[b + d\psi_{y1}(-1)]^2[c + e\psi_{y1}(-1)]^2\big\} - \\
- \psi_{y1}^2(0) - M\psi_{y2}^2(0)\psi_{z1}^2(0) + (\beta_1 + \alpha_2^2)[\psi_{y1}^2(0) - \psi_{y1}^2(-1)] + \\
+ \beta_2[\psi_{y2}^2(0)\psi_{z1}^2(0) - \psi_{y2}^2(-1)\psi_{z1}^2(-1)] = \\
= a_1^2\psi_{y1}^2(0) + 2a_1a_2\psi_{y1}(0)\psi_{y1}(-1) + 2a_1l\psi_{y1}(0)\mu_1(-1) + \\
+ 2a_2l\psi_{y1}(-1)\mu_1(-1) + l^2\mu_1^2(-1) + \alpha_1^2\psi_{y1}^2(0) + \alpha_2^2\psi_{y1}^2(-1) + Mb^2c^2\mu_1^2(0) + \\
+ r_1\psi_{y1}(-1)\mu_1^2(0) + r_2\psi_{y1}^2(-1)\mu_1^2(0) + r_3\psi_{y1}^3(-1)\mu_1^2(0) + Md^2e^2\psi_{y1}^4(-1)\mu_1^2(0) - \\
- \psi_{y1}^2(0) - M\mu_1^2(0) + (\beta_1 + \alpha_2^2)[\psi_{y1}^2(0) - \psi_{y1}^2(-1)] + \beta_2[\mu_1^2(0) - \mu_1^2(-1)] = \\
= (a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 + \beta_1)\psi_{y1}^2(0) + 2a_1a_2\psi_{y1}(0)\psi_{y1}(-1) + (a_2^2 - \beta_1)\psi_{y1}^2(-1) + \\
+ 2a_1l\psi_{y1}(0)\mu_1(-1) + 2a_2l\psi_{y1}(-1)\mu_1(-1) + (Mb^2c^2 - M + \beta_2)\mu_1^2(0) + \\
+ (l^2 - \beta_2)\mu_1^2(-1) + r_1\psi_{y1}(-1)\mu_1^2(0) + r_2\psi_{y1}^2(-1)\mu_1^2(0) + \\
+ r_3\psi_{y1}^3(-1)\mu_1^2(0) + Md^2e^2\psi_{y1}^4(-1)\mu_1^2(0), \\
r_1 = bcr_0, r_2 = M(b^2e^2 + 4bcde + c^2d^2), r_3 = der_0, r_0 = 2M(be + cd).
\end{gathered}$$

В полученных равенствах вычисление условного математического ожидания проведено с учетом соотношений $E[\xi_i(k)] = 0$, $E[\xi_i^2(k)] = 1$, соответствующих стандартным нормальным распределениям некоррелированных между собой случайных величин $\xi_i(k)$ $(i = 1, 2)$.

Используя для упрощения последующего анализа неравенства

$$\begin{gathered}
2a_1a_2\psi_{y1}(0)\psi_{y1}(-1) \leqslant |a_1a_2|[\psi_{y1}^2(0) + \psi_{y1}^2(-1)], \\
2a_2l\psi_{y1}(-1)\mu_1(-1) \leqslant |a_2l|[\psi_{y1}^2(-1) + \mu_1^2(-1)],
\end{gathered}$$

для квадратичной части $(LV)_2$ полученного выражения для $LV(\psi)$ можно получить следующую оценку:

$$\begin{gathered}
(LV)_2 \leqslant (a_1^2 + |a_1a_2| + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 + \beta_1)\psi_{y1}^2(0) + \\
+ 2a_1l\psi_{y1}(0)\mu_1(-1) + (l^2 + |a_2l| - \beta_2)\mu_1^2(-1) + \\
+ (a_2^2 + |a_1a_2| + |a_2l| - \beta_1)\psi_{y1}^2(-1) + (Mb^2c^2 - M + \beta_2)\mu_1^2(0).
\end{gathered}$$

При выполнении условий

$$a_1^2 + |a_1 a_2| + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 + \beta_1 < 0,$$
$$(a_1^2 + |a_1 a_2| + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 + \beta_1)(l^2 + |a_2 l| - \beta_2) > a_1^2 l^2,$$
$$a_2^2 + |a_1 a_2| + |a_2 l| - \beta_1 < 0, \quad Mb^2c^2 - M + \beta_2 < 0$$

$(LV)_2$ является отрицательно определенной функцией переменных $\psi_{y1}(0)$, $\psi_{y1}(-1), \mu_1(0), \mu_1(-1)$ на основании критерия Сильвестра. Поэтому в данном случае при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) для усредненной разности (приращения) $LV(\psi)$ функционала (12) имеет место неравенство $LV(\psi) \leqslant 0$.

Пусть параметры системы (10) удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} (|a_1| + |a_2|)^2 + |a_2 l| + a_1^2 + a_2^2 < 1, \\ [(|a_1| + |a_2|)^2 + |a_2 l| + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1][l^2 + |a_2 l| + M(b^2c^2 - 1)] > a^2 l^2, \end{gathered} \tag{14}$$

а параметры β_1, β_2 в функционале (12) выберем следующим образом:

$$\beta_1 = a_2^2 + |a_1 a_2| + |a_2 l| + \varepsilon_1, \quad \beta_2 = M(1 - b^2c^2) - \varepsilon_2.$$

При достаточно малых значениях ε_1, ε_2 и $h_1 > 0$ для разности (приращения) LV функционала в области (5) (*но не в области* (4)) при любых значениях параметров d, e имеет место неравенство $LV(\psi) \leqslant 0$. Значит, для V-функционала (12) в области (5), помимо условий (6), (7), также выполняется условие (8).

На основании теоремы 2 заключаем, что при выполнении условий (14) "частичное" положение равновесия (11) системы (10) равномерно y_1-устойчиво по вероятности при больших значениях z_{10} в целом по z_{20}. Ассоциированный с системой (10) оператор $LV(\psi)$ в области (4) является *знакопеременным.*

Отметим, что за счет выбора подходящего значения M в область устойчивости можно включить (или исключить) некоторые заданные комбинации параметров системы (10). Так, например, если $l^2 + |a_2 l| = 1$, то для, казалось бы, «естественного» выбора значения $M = 1$ в функционале (12) при любых значениях параметров b, c, d, e область устойчивости (14) оказывается пустым множеством. Однако в том же случае $l^2 + |a_2 l| = 1$ можно рассматривать область (14), полагая $M = 2$.

С другой стороны, при заданном значении M область y_1-устойчивости можно изменить за счет изменения оценок квадратичной части $(LV)_2$ выражения, определяющего $LV(\psi)$. Действительно, используя неравенство

$$2a_1 l \psi_{y1}(0)\mu_1(-1) \leqslant |a_1 l|[\psi_{y1}^2(0) + \mu_1^2(-1)],$$

в случае $a_2 = 0$ при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) неравенство $LV(\psi) \leqslant 0$ будет иметь место при выполнении условий

$$a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + |a_1 l| - 1 + \beta_1 \leqslant 0,$$
$$l^2 + |a_1 l| - \beta_2 \leqslant 0, \quad M(b^2c^2 - 1) + \beta_2 \leqslant 0.$$

В данном случае область y_1-устойчивости определяется следующим образом:

$$(|a_1| + |l|)^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 < 1 + M(1 - b^2c^2), \quad b^2c^2 < 1; \tag{15}$$

в отличие от области (14) при $M = l^2 = 1$ область (15) не является пустым множеством. Для наглядности отметим, что при $M = 1$, $b^2c^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$ области устойчивости (14) и (15) имеют соответственно вид $a_1^2 + l^2 < 1$ и $|a_1| + |l| < \sqrt{2}$, причем область (15) охватывает случай $l^2 = 1$.

Отметим также, что при $\alpha_2 = 0$ и $M = 2$ область (12) совпадает с областью равномерной y_1-устойчивости по вероятности "частичного" положения равновесия $y_1(k) = y_2(k) = 0$ системы (10) при отсутствии эффекта запаздывания; такая система анализировалась [8] посредством функции Ляпунова $V(x) = y_1^2 + 2y_2^2z_1^2$ и вспомогательной функции $\mu_1 = y_2z_1$.

Для численной конкретизации приведем результаты вычислений по рекуррентным соотношениям (12) на отрезке $k \in [0, 25]$ при $y_i(-1) = y_i(0) = 0{,}1$ $(i = 1, 2)$, $z_1(-1) = z_1(0) = 1$ и при значениях параметров $a_1 = 1/2$, $b = 3/2$, $a_2 = 0$, $c = 1/3$, $d = e = l = 1$.

Для «невозмущенного» случая $\xi_{1,2}(k) \equiv 0$ результаты вычислений приводятся в левой части таблицы. При случайных воздействиях $\xi_1(k), \xi_2(k)$, интенсивности α_1, α_2 которых удовлетворяют условию (14), выборочные траектории группируются около «невозмущенной» траектории, фокусирующейся при $k \to \infty$ вдоль оси Oy_2. Для оценки влияния случайных воздействий на динамику системы (10) в правой части таблицы при $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 0$ и тех же значениях параметров приводят-

Таблица

k	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$	$\xi_1(k)$	$\xi_2(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$
–1	0,1	0,1	1	-	-	0,1	0,1	1
0	0,1	0,1	1	0	0	0,1	0,1	1
1	0,15	0,16	0,4333	–1	0	0,15	0,16	0,4333
2	0,1750	0,2560	0,1877	1	0	0,1251	0,2560	0,1877
3	0,1568	0,4224	0,2094	1	0	0,1735	0,4224	0,2094
4	0,1264	0,4288	0,0954	0	0	0,1926	0,6864	0,0960
5	0,1517	0,7104	0,0468	–1	0	0,1847	1,1487	0,0487
6	0,1168	1,1554	0,0215	–1	0	0,0967	1,9443	0,0256
7	0,0916	1,9084	0,0104	1	0	0,0720	3,2757	0,0133
8	0,0706	3,0854	0,0060	0	0	0,1098	5,2303	0,0057
9	0,0551	4,9107	0,0025	0	0	0,0985	8,2220	0,0023
10	0,0461	7,7127	0,0004	1	0	0,0791	13,236	0,0011
...	...	...	...	...	...	...	...	...
15	0,0050	65,557	$5{,}5 \times 10^{-6}$	–1	0	0,0151	127,93	$1{,}1 \times 10^{-5}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	0,00039	504,13	$2{,}4 \times 10^{-8}$	–1	0	0,0010	1005,5	$5{,}4 \times 10^{-8}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
25	$1{,}9 \times 10^{-5}$	3832,1	$4{,}7 \times 10^{-10}$	0	0	$2{,}9 \times 10^{-5}$	7649,1	$2{,}2 \times 10^{-10}$

ся результаты вычислений в случае, когда $\xi_2(k) \equiv 0$, а допустимая реализация $\xi_1(k)$ на отрезке $k \in [0, 25]$ определяется последовательностью $\{0, -1, 1, 1, 0, -1, -1, 1, 0, 0, 1, 1, -1, 0, 0, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 0\}$.

Пример 2. Пусть дискретная система (1) состоит из уравнений

$$\begin{gathered} y_1(k+1) = [a_1 + \alpha_1 \xi_1(k) + l y_2(k-1) z_1(k-1)] y_1(k) + \alpha_2 y_1(k-1) \xi_2(k), \\ y_2(k+1) = [b + d y_1(k-1)] y_2(k), \\ z_1(k+1) = [c + e y_1(k-1)] z_1(k), \quad z_2(k+1) = Z_2(k, x_k, \xi(k)), \end{gathered} \tag{16}$$

которые представляют структурно измененный вариант системы (10).

Для анализа y_1-устойчивости по вероятности "частичного" положения равновесия (11) системы (16) используем дискретный V-функционал (12) при $\beta_1 = 0, \beta_2 = M(1 - b^2c^2) - \varepsilon_2$ и вспомогательную дискретную функцию (13).

Квадратичная часть $[LV(\psi)]_2$ усредненной разности (приращения) $LV(\psi)$ этого функционала в силу системы (16) имеет вид

$$[LV(\psi)]_2 = (a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1)\psi_{y1}^2(0) + (Mb^2c^2 - M + \beta_2)\mu_1^2(0) + (l^2 - \beta_2)\mu_1^2(-1).$$

Поэтому при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) при любых значениях параметров d, e, l_1, l_2 неравенство $LV(\psi) \leqslant 0$ будет иметь место, если

$$a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 < 1, \quad M(b^2c^2 - 1) + \beta_2 < 0, \quad l^2 - \beta^2 < 0.$$

В результате при выполнении условий

$$a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 < 1, \quad l^2 + M(b^2c^2 - 1) < 1 \tag{17}$$

"частичное" положение равновесия (11) системы (17) равномерно y_1-устойчиво по вероятности при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} на основании теоремы 2.

Как и при анализе системы (10), если $l^2 = 1$, то для «естественного» выбора значения $M = 1$ в функционале (12) при любых значениях параметров b, c, d, e область устойчивости (17) оказывается пустым множеством. Однако это множество также можно расширить подходящим выбором M, например при $M = 2$.

5. Заключение

Для нелинейной системы стохастических функционально-разностных уравнений с конечным запаздыванием, подверженной воздействию дискретного случайного процесса типа "белого" шума, дана поставка задач анализа устойчивости по части переменных по вероятности "частичного" нулевого положения равновесия. Дискретная вектор-функция, определяющая начальное состояние системы, считается детерминированной.

Приводятся достаточные условия разрешимости поставленной задачи в контексте дискретно-стохастического варианта метода функционалов Ляпунова–Красовского в соответствующей модификации. Наряду с основным дискретным V-функционалом также рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная дискретная μ-функция для корректировки области дискретного функционального пространства, в которой строится V-функционал. Целесообразность такого подхода заключается в том, что в результате V-функционал, а также его усредненная разность (приращение) в силу рассматриваемой системы, могут быть знакопеременными.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

Пусть при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) выполняются условия (6)–(8). Возьмем произвольное число ε $(0 < \varepsilon < h_1)$, произвольное значение k_0, а также начальное значение x_0 из области $D_\varepsilon = \{||y_0|| < \varepsilon, ||z_{10}|| \leqslant L, ||z_{20}|| < \infty\}$. Рассмотрим случайный процесс $x(k_0, x_0)$, являющийся решением системы (1), и обозначим через k_ε "целочисленный" момент первого выхода этого процесса из области $|y_1| \leqslant \varepsilon$: $k_\varepsilon = \inf\{k : |y_1(k; k_0, x_0)| > \varepsilon\}$ при $k \geqslant k_0$. Положим $t(k) = \min(k_\varepsilon, k); t(k_0) = k_0$.

Имеют место равенства

$$V\left(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)\right) - V(k_0, x_0) = \sum_{s=k_0}^{k-1} \Delta V\left(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)\right);$$

$$\Delta V\left(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)\right) = \Delta V\left(t(s+1), x_{t(s+1)}(k_0, x_0)\right) - \Delta V\left(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)\right).$$

Из этих равенств следует, что для последовательности $v(k)$ случайных величин $v(k) = V(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0))$, порожденных реализациями $x(k, \omega), \xi(k, \omega)$ случайного процесса $x(k), \xi(k)$, определяемого системой (1), имеют место "усредненные" соотношения

$$\begin{gathered} E\left[V\left(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)\right) - V(k_0, x_0)\right] = \\ = EV\left(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)\right) - V(k_0, x_0) = \sum_{s=k_0}^{k-1} E\Delta V\left(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)\right). \end{gathered} \tag{П.1}$$

Учитывая равенства (полученные из соотношений (П.1) с учетом правила вычисления повторного математического ожидания)

$$\begin{gathered} E\Delta V\left(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)\right) = \\ = E\left\{E_{t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)}\left[V(t(s+1), x_{t(s+1)}(k_0, x_0))\right]\right\} - V\left(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)\right) = \\ = E\left[LV\left(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)\right)\right], \end{gathered}$$

приходим к соотношению (дискретно-функциональный вариант формулы Дынкина)

$$EV\left(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)\right) - V(k_0, x_0) = \sum_{s=k_0}^{k-1} E\left[LV\left(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)\right)\right].$$

В результате на основании условия (8) получаем неравенство

$$EV\left(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)\right) \leqslant V(k_0, x_0) < \infty. \tag{П.2}$$

Если справедливо неравенство $k > k_\varepsilon$ (в этом случае имеем $t(k) = k_\varepsilon$), то выполняются соотношения $|y_1(t(k); k_0, x_0)| = |y_1(k_\varepsilon; k_0, x_0)| \geqslant \varepsilon$. Если же $k < k_\varepsilon$ (в этом случае имеем $t(k) = k$), то на основании неравенства Чебышева–Маркова и оценки (П.2) находим

$$\begin{gathered} P[|y_1(k; k_0, x_0)| > \varepsilon] \leqslant a^{-1}(\varepsilon) E[a(|y_1(k; k_0, x_0)|)] \leqslant \\ \leqslant a^{-1}(\varepsilon) E[a(|y_1(k; k_0, x_0)| + |\mu(k, x(k; k_0, x_0))|)] \leqslant \\ \leqslant a^{-1}(\varepsilon) E[V(k, x_{t(k)}(k_0, x_0))] = \\ = a^{-1}(\varepsilon) E[V(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0))] \leqslant a^{-1}(\varepsilon) V(k_0, x_0). \end{gathered} \tag{П.3}$$

Поскольку V-функционал при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ непрерывен, $V(t, 0) \equiv 0$ и выполняются условия (7), то для всех $k_0 \geqslant 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение

$$\lim_{||y_0|| \to 0} V(k_0, x_0) = 0 \tag{П.4}$$

выполняется при $||z_{10}|| \leqslant L$ равномерно по $||z_{20}|| < \infty$.

Поэтому для всех $k_0 \geqslant 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (П.3), (П.4) имеем предельное соотношение

$$\lim_{||y_0|| \to 0} P\left[\sup_{k > k_0} |y_1(k; k_0, x_0)| > \varepsilon\right] = 0,$$

выполняющееся при $||z_{10}|| \leqslant L$ равномерно по $||z_{20}|| < \infty$. В результате для каждого $k_0 \geqslant 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $k \geqslant k_0$ и $x_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} "частичное" положение равновесия $y_k = 0$ системы (1) y_1-устойчиво по вероятности.

Доказательство теоремы 2.

Если вместо условий (7) выполняются условия (9), то для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение (П.4) выполняется при $||z_{10}|| \leqslant L$ равномерно не только по $||z_{20}|| < \infty$, но и по $k_0 \geqslant 0$. В результате для каждого $k_0 \geqslant 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется независимое от k_0 число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $k \geqslant k_0$ и $x_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} "частичное" положение равновесия $y_k = 0$ системы (1) равномерно y_1-устойчиво по вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
2. *Пакшин П.В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Физматлит, 1994.
3. *Ажмяков В.В., Пятницкий Е.С.* Нелокальный синтез систем стабилизации дискретных стохастических объектов управления // АиТ. 1994. № 2. С. 68–78.

   Azhmyakov V.V., Pyatnitskiy E.S. Nonlocal Synthesis of Systems for Stabilization of Discrete Stochastic Controllable Objects // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 2. P. 202–210.
4. *Барабанов И.Н.* Построение функций Ляпунова для дискретных систем со случайными параметрами // АиТ. 1995. № 11. С. 31–41.

   Barabanov I.N. Construction of Lyapunov Functions for Discrete Systems with Stochastic Parameters // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 11. P. 1529–1537.
5. *Teel A.R., Hespanha J.P., Subbaraman A.* Equivalent Characterizations of Input-to-State Stability for Stochastic Discrete-Time Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 2. P. 516–522.
6. *Jian X.S., Tian S.P., Zhang T.L., Zhang W.H.* Stability and Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2019. V. 29. No. 18. P. 6419–6437.
7. *Qin Y., Cao M., Anderson B.D.O.* Lyapunov Criterion for Stochastic Systems and its Applications in Distributed Computation // IEEE Trans. Autom. Control. 2020. V. 65. No. 2. P. 546–560.
8. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // АиТ. 2021. № 9. С. 116–132.

   Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On the Problem of Partial Stability for Discrete-Time Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1554–1567.
9. *Shaikhet L.* Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations. Springer Science & Business Media, 2013.
10. *Astrom K.J., Wittenmark B.* Computer Controlled Systems: Theory and Design. 1984.
11. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Boston: Birkhauser, 2014.
12. *Hetel L., Daafouz J., Iung C.* Equivalence between the Lyapunov – Krasovskii Functionals Approach for Discrete Delay Systems and that of the Stability Conditions for Switched Systems // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2008. V. 2. No. 3. P. 697–705.

13. *Родионов А.М.* Некоторые модификации теорем второго метода Ляпунова для дискретных уравнений // АиТ. 1992. № 9. С. 86–93.

Rodionov A.M. Certain Modifications of Theorems of the Second Lyapunov Method for Discrete Equations // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 9. P. 1381–1386.

14. *Elaydi S., Zhang S.* Stability and Periodicity of Difference Equations with Finite Delay // Funkcialaj Ekvacioj. 1994. V. 37. No. 3. P. 401–413.

15. *Анашкин О.В.* Функции Ляпунова в теории устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 7. С. 976–978.

16. *Pepe P., Pola G., Di Benedetto M.D.* On Lyapunov–Krasovskii Characterizations of Stability Notions for Discrete-Time Systems with Uncertain Time-Varying Time Delays // IEEE Trans. Autom. Control. 2017. V. 63. No. 6. P. 1603–1617.

17. *Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.B.* Delay-Independent Stability Conditions for a Class of Nonlinear Difference Systems // J. Franklin Institute. 2018. V. 355. No. 7. P. 3367–3380.

18. *Zhou B.* Improved Razumikhin and Krasovskii Approaches for Discrete-Time Time-Varying Time-Delay Systems // Automatica. 2018. V. 91. P. 256–269.

19. *Li X., Wang R., Du S., Li T.* An Improved Exponential Stability Analysis Method for Discrete-Time Systems with a Time-Varying Delay // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2022. V. 32. No. 2. P. 669–681.

20. *Kolmanovskii V.B., Shaikhet L.E.* General Method of Lyapunov Functionals Construction for Stability Investigations of Stochastic Difference Equations // Dynamical Systems and Applications (World Scientific Series in Applicable Analysis). 1995. V. 4. P. 397–439.

21. *Paternoster B., Shaikhet L.* About Stability of Nonlinear Stochastic Difference Equations // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13. No. 5. P. 27–32.

22. *Rodkina A., Basin M.* On Delay-Dependent Stability for Vector Nonlinear Stochastic Delay-Difference Equations with Volterra Diffusion Term // Syst. Control Lett. 2007. V. 56. No. 6. P. 423–430.

23. *Diblik J., Rodkina A., Smarda Z.* On Local Stability of Stochastic Delay Nonlinear Discrete Systems with State-Dependent Noise // Appl. Math. Comp. 2020. V. 374. Art. 125019.

24. *Shaikhet L.* Stability Investigation of Systems of Nonlinear Stochastic Difference Equations // Res. Highlig. Math. Comput. Sci. V. 2. 2022. P. 79–92.

25. *Shaikhet L.* Stability of the Exponential Type System of Stochastic Difference Equations // Mathematics. 2023. V. 11. No. 18. Art. 3975.

26. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.

Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.

27. *Zong X., Lei D., Wu F.* Discrete Razumikhin-Type Stability Theorems for Stochastic Discrete-Time Delay Systems // J. Franklin Institute. 2018. V. 355. No. 17. P. 8245–8265.

28. *Ngoc P.H.A., Hieu L.T.* A Novel Approach to Exponential Stability in Mean Square of Stochastic Difference Systems with Delays // Syst. Control Lett. 2022. V. 168. Art. 105372.

29. *Mao X.R., Yuan C.G.* Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. London: Imperial College Press, 2006.
30. *Rajpurohit T., Haddad W.M.* Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems // J. Dynam. Syst., Measuremen, Control. 2017. V. 139. No. 9. Art. DS-15-1602.
31. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // АиТ. 2019. № 5. С. 86–98.

    Vorotnikov V.I., Martyshenko Y.G. On the Partial Stability in Probability of Nonlinear Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 5. P. 856–866.
32. *Воротников В.И.* К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // АиТ. 2020. № 2. С. 3–17.

    Vorotnikov V.I. On Partial Stability and Detectability of Functional Differential Systems with Aftereffect // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 199–210.
33. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* О частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических функционально-дифференциальных систем с последействием (запаздыванием) // Изв. РАН. ТиСУ. 2024. Т. 65. Вып. 1. С. 3–16.
34. *Игнатьев А.О.* Метод функций Ляпунова в системах разностных уравнений: устойчивость относительно части переменных // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 3. С. 407–415.
35. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* Об одном подходе к анализу устойчивости «частичных» положений равновесия нелинейных дискретных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. Т. 63. Вып. 3. С. 57–68.
36. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
37. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.
38. *Kadiev R., Ponosov A.* The W-Transform in Stability Analysis for Stochastic Linear Functional Difference Equations // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 389. No. 2. P. 1239–1250.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 20.09.2023

После доработки 15.03.2024

Принята к публикации 30.05.2024